⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces vectoriels de E et soient $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ une base de G.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. on pose $q = \mathrm{Id} - p$.

1) Montrer que q est un projecteur.
2) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q)$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Montrer dans chaque cas que F et G sont supplémentaires dans E :

a) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, 2, -1))$.
b) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P(1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,(X^2)$.
c) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}$ (où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques d'ordre n à coefficients réels).
d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $G = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (où $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $G = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont respectivement : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

⋆

Exercice 4 — Voir correction

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$

1) Montrer que $E_1 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2) On considère la projection sur E_2 parallèlement à E_1, c'est à dire le projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Im}(p) = E_2$ et $\mathrm{Ker}(p) = E_1$. Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle la matrice d'un projecteur ?
2) Déterminer alors les sous espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ de ce projecteur.
3) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋆ ⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :
   (i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
   (ii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
   (iii) $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

   Indication : on pourra montrer (i) $\Leftrightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (ii)
2) Un endomorphisme vérifiant les propositions ci-dessus est-il nécessairement un projecteur ?

⋆⋆⋆
Exercice 7 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$

⋆⋆⋆
Exercice 8 — Voir correction

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$.

1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel strict de E puis déterminer un supplémentaire de F dans E.
2) Même question avec $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0$.
3) Généraliser à $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 0\}$ avec $1 \leq k \leq n$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ des réels distincts.

⋆⋆
Exercice 9 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et q un projecteur de E.
Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \mathrm{Ker}(q)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(q))$.

⋆⋆
Exercice 10 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E. Montrer que p et u commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

⋆⋆
Exercice 11 — Voir correction

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], R)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie). Soit $F = \left\{ f \in E \middle| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ est constante}\}$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Que vaut $p(f)$ pour $f \in E$?

⋆⋆
Exercice 12 — Voir correction

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
2) Montrer que si $p + q$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

⋆⋆⋆
Exercice 13 — Voir correction

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont en somme directe.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.
3) On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & \left(x \mapsto \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array}$$

   Vérifier que f et g satisfont les conditions de l'énoncé.

⋆⋆⋆
Exercice 14 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

2) Montrer par récurrence que si $F_1, F_2, \dots, F_n$ est une famille de sous espaces vectoriels de E on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$$

avec égalité si et seulement si $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe.

3) Soit $p_1, p_2, \dots, p_n$ une famille de projecteurs. Montrer que $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.
Indication : commencer par montrer que si p est un projecteur alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 15 **Voir correction**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$

(ii) $u^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E)/2$

(iii) $u^2 = 0$ et il existe un endomorphisme v tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 16 **Voir correction**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On dit qu'une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois égalités suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \quad (i) \quad , \quad A = AA'A \quad (ii) \quad , \quad A' = A'AA' \quad (iii)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

1) Supposons que A admette un pseudo-inverse. Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.
2) Réciproquement, supposons dans cette question que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$. On note r le rang de a.
   a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$
   b) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec B inversible et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
   c) Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.
3) On suppose que A admet un pseudo inverse A' et on note a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'. On garde les matrices B et P de la question précédente.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   b) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a. Préciser ce que vaut $P^{-1}(AA')P$.
   c) Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 17 **Voir correction**

(ENS 2025) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Pour simplifier les notations on node d_H la dimension d'un sous-espace vectoriel H de E.

1) En considérant l'application

$$u \quad : \quad \begin{array}{ccc} F \times G & \to & F + G \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

montrer que $d_{F+G} + d_{F\cap G} = d_F + d_G$. On pourra admettre que $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.

2) Montrer que $d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 - d_F^2 - d_G^2 = 2(d_G - d_{F\cap G})(d_F - d_{F\cap G})$.
3) Montrer que $d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 \geqslant d_F^2 + d_G^2$ et étudier les cas d'égalité.
4) Soit $\alpha > 1$ un réel. Montrer que $d_{F+G}^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha \geqslant d_F^\alpha + d_G^\alpha$ et étudier le cas d'égalité.
Indication : on pourra considérer la fonction $f(x) = (x + d_G - d_{F\cap G})^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - x^\alpha - d_G^\alpha$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : Supposons que $E = F \oplus G$. Alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ donc $\dim(E) = p + r$.
Montrons que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de E : pour tout vecteur $u \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $u = f + g$ car $E = F + G$. Puisque $\mathcal{F}$ est une base de F et $\mathcal{G}$ est une base de G, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ des réels tels que $f = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \cdots + \lambda_p \cdot f_p$ et $g = \mu_1 \cdot g_1 + \mu_2 \cdot g_2 + \cdots + \mu_r \cdot g_r$.
Ainsi, $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j$. La famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_p)$ est bien une famille génératrice de E, et puisque son nombre d'éléments est égal à la dimension de E c'est donc une base de E.

Réciproquement, supposons que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ soit une base de E.

Montrons que $E = F + G$: Soit $u \in E$ un vecteur, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_r$ tels que $u = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i}_{\in F} +_u nderbrace \textstyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j g$

donc $u \in F + G$. Ainsi, $E \subset F + G$ donc $E = F + G$ car $F + G \subset E$.
Montrons que $F \cap G = \{0\}$: Soit $u \in F \cap G$. Alors, $u \in F$ donc il existe $\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$, et $u \in G$ donc il existe des réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ tels que $u = \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j$. Ainsi, $0 = u - u = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2 - \cdots - \mu_r g_r = 0$. Or $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E donc une famille libre, ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r = 0$. Finalement $u = 0$, donc on a bien $F \cap G = \{0\}$.
On en conclut que $E = F \oplus G$.
On a montré que $E = F \oplus G$ si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E.
Remarque : on peut au montrer que $F \cap G = \{0\}$ en analysant les dimensions : puisqu'on a montré que $F + G = E$, on en déduit que $\dim(F + G) = \dim(E) = p + r$, donc d'après l'égalité $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ on en déduit que $p + r = p + r - \dim(F \cap G)$ donc que $\dim(F \cap G) = 0$, et donc $F \cap G = \{0\}$.
Correction de l'exercice 2 :

1) $q^2 = (\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - 2p + p = \mathrm{Id} - p$ car Id et p commutent. Ainsi $q^2 = q$ donc q est un projecteur.
2) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = x - p(x) = 0$ d'où $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0\}$ donc $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sont en somme directe.
De plus, pour tout $x \in E$, $x = x - p(x) + p(x)$. Or $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ car p est un projecteur, et $q(p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$. On a donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Ker}(q)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$. On en conclut que $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ donc finalement que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q)$.
3) Soit $x \in \mathrm{Im}(q)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = y - p(y)$, donc $p(x) = p(y) - p^2(y) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$. On a donc $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
En notant $\dim(E) = n$ et en appliquant la formule de Grassmann au résultat de la question précédente on obtient :
$$n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Ker}(q)) - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q))}_{=0} = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Ker}(q))$$
d'où $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(q)) = \mathrm{rg}(q)$. On en conclut que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$ par inclusion et égalité des dimensions.
De la même façon on a $\dim(\mathrm{Ker}(q)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(p)) = \mathrm{rg}(p)$. Pour tout $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ donc $q(x) = p(y) - p^2(y) = 0$ et ainsi $x \in \mathrm{Ker}(q)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et permet donc de conclure que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.

Correction de l'exercice 3 :
Rappel méthode pour montrer que F et G sont supplémentaire dans E (i.e. que $E = F \oplus G$) :

1) Montrer que F et G sont en somme directe (ce qui s'écrit $F + G = F \oplus G$), en montrant que $F \cap G = \{0\}$.
2) Montrer que $F + G = E$ en montrant que tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Autre méthode en passant par les dimensions (ne fonctionne qu'en dimension finie) :

1) Montrer que F et G sont en somme directe
2) Montrer que $\dim(F + G) = \dim(E)$, on peut se servir du résultat 1. pour dire que $\dim(F + G) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Correction :

a) Montrons que F et G sont en somme directe :
Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u = k \cdot (1, 2, -1)$ donc $u = (k, 2k, -k)$. Comme $u \in F$ on a $k + 2k - (-k) = 0$ donc $4k = 0$ donc $k = 0$ et finalement $u = (0, 0, 0)$. Ainsi :
$$\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$$
Montrons que $F + G = E$

Soit $u = (x, y, z) \in E$. Raisonnons par analyse synthèse et supposons qu'il existe un vecteur $v_F = (x_F, y_F, z_F)$ dans F et un vecteur $v_G = (x_G, y_G, z_G)$ dans G tels que $u = v_F + v_G$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tels que $v_G = (k, 2k, -k)$ donc $\left\{\begin{array}{lll} x_G & = & k \\ y_G & = & 2k \\ z_G & = & -k \end{array}\right.$.

On a ensuite :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_F & = & x - x_G \\ y_F & = & y - y_G \\ z_F & = & z - z_G \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_F & = & x - k \\ y_F & = & y - 2k \\ z_F & = & z + k \end{array}\right.$$

et comme $v_F \in F$ il faut que $x_F + y_F - z_F = 0$, d'où :

$$(x - k) + (y - 2k) - (z + k) = 0$$

donc nécessairement :

$$k = \frac{x + y - z}{4}$$

On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_G & = & \dfrac{x + y - z}{4} \\ y_G & = & \dfrac{x + y - z}{2} \\ z_G & = & \dfrac{-x - y + z}{4} \end{array}\right.$$

puis

$$\left\{\begin{array}{lll} x_F & = & \dfrac{3x - y + z}{4} \\ y_F & = & \dfrac{y + z - x}{2} \\ z_F & = & \dfrac{x + y + 3z}{4} \end{array}\right.$$

Réciproquement, pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de E, en posant

$$v_F = \left(dfrac3x - y + z4 \ , \ \frac{y + z - x}{2} \ , \ \frac{x + y + 3z}{4}\right) \quad \text{et} \quad v_G = \left(\frac{x + y - z}{4} \ , \ \frac{x + t - z}{2} \ , \ \frac{z - x - y}{4}\right)$$

on a bien $v_F \in F$, $v_G \in G$ et $u = v_F + v_G$ (vérification immédiate d'après les calculs ci-dessus).

Conclusion : $E = F + G$

Bilan : $E = F \oplus G$, autrement dit F et G sont supplémentaires dans E.

Remarque : Lorsqu'on montre par analyse synthèse que $E = F + G$, la solution trouvée est unique ce qui prouve que chaque élément de $F + G$ s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. C'est la définition d'une somme directe donc cela suffit à montrer que $E = F \oplus G$.

b) <u>Montrons que $F + G = F \oplus G$</u> : pour cela il suffit de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
Soit donc P un polynôme de degré 2 à coefficient réel dans $F \cap G$. Il existe un réel a tel que $P(X) = aX^2$ car $P \in G$, et $P(1) = P(0)$ donc $a = 0$. Ainsi P est le polynôme nul donc on a bien $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
<u>Montrons que $\mathbb{R}_2[X] = F + G$</u>. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons qu'il existe deux polynômes $Q \in F$ et $R \in G$ tels que $P = Q + R$. Soient $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ et $a'' \in \mathbb{R}$ tels que $Q(X) = a'X^2 + b'X + c'$ et $R(X) = a''X^2$. Comme $P(X) = Q(X) + R(X)$ on a par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{lll} a & = & a' + a'' \\ b & = & b' \\ c & = & c' \end{array}\right.$$

et comme $Q(0) = Q(1)$ on a $c' = a' + b' + c'$ d'où $a' + b' = 0$. Les coefficients de Q et R sont entièrement déterminés par ceux de P :

$$\left\{\begin{array}{lll} a'' & = & a + b \\ a' & = & -b" = -b \\ b' & = & b \\ c' & = & c \end{array}\right.$$

Réciproquement, en posant $Q(X) = -bX^2 + bX + c$ et $R(X) = (a + b)X^2$ on a bien $Q(X) \in F$ et $R(X) \in G$ et $P(X) = Q(X) + R(X)$. Ainsi $\mathbb{R}_2[X] = F + G$ donc finalement $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

c) Montrons que $F+G=F\oplus G$: soit $M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois symétrique et antisymtrique. On a ${}^tM=M$ et ${}^tM=-M$ donc $M=-M$ et donc $M=0$. Ainsi $F\cap G=\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ donc F et G sont en somme directe.
Montrons que $F+G=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n quelconque. On raisonne par analyse-synthèse et on suppose qu'il existe deux matrices $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M=S+A$ (1).
Par linéarité de la transposée : ${}^tM={}^tS+{}^tA=S-A$ (2). La somme et la différence de (1) et (2) donnent :

$$\begin{cases} M+{}^tM &= 2S \\ M-{}^tM &= 2A \end{cases}$$

d'où $S=\dfrac{1}{2}(M+{}^tM)$ et $A=\dfrac{1}{2}(M-{}^tM)$.
Réciproquement, en posant $S=\dfrac{1}{2}(M+{}^tM)$ et $A=\dfrac{1}{2}(M-{}^tM)$ on a bien $S+A=M$. De plus : ${}^tS=\dfrac{1}{2}({}^tM+M)=S$ donc $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA=\dfrac{1}{2}({}^tM-M)=-\dfrac{1}{2}(M-{}^tM)=-A$ donc $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Finalement on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $E=F+G$ donc finalement $E=F\oplus G$.

d) Montrons que $F+G=F\oplus G$: si $f\in F\cap G$, f est une fonction à la fois paire et impaire. Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} f(-x) &= f(x) \\ f(-x) &= -f(x) \end{cases} \Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=-f(x)$$

$$\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=0$$

donc $f=0_E$, c'est la fonction nulle.
Montrons que $E=F+G$: Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse synthèse et on suppose d'abord qu'il existe une fonction p paire et une fonction i impaire définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f=p+i$, c'est à dire telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=p(x)+i(x)$ (1).
On a donc : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(-x)=p(-x)+i(-x)=p(x)-i(x)$ (2) par parité de p et imparité de i. En faisant (1)+(2) et (1)-(2) on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} f(x)+f(-x) &= 2p(x) \\ f(x)-f(-x)=2i(x) & \end{cases}$$

d'où $p(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.
Réciproquement, en posant $p(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ on a pour tout réel x : $f(x)=p(x)+i(x)$.
De plus, pour tout réel x, $p(-x)=\dfrac{1}{2}(f(-x)+f(x))=p(x)$ et $i(-x)=\dfrac{1}{2}(f(-x)-f(x))=-\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))=-i(x)$ donc p est paire et i est impaire.
On a donc bien $E=F+G$ donc finalement $E=F\oplus G$.

Remarque plus poussée (après avoir vu les symétries) : Pourquoi ces deux dernières questions ont-elle des réponses si similaires ?
Rappelez vous que pour toute symétrie s d'un espace vectoriel E, on a $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.
Pour les matrices, si on considère la symétrie $s:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M\mapsto {}^tM$ (c'en est bien une car $s^2=\mathrm{id}$), alors il est presque immédiat que :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})\quad\text{et}\quad\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$$

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si on considère la symétrie $s:\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à toute fonction f associe la fonction $s(f):x\mapsto f(-x)$ (c'est bien une symétrie car $s^2=\mathrm{id}$), alors il est presque immédiat que :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})\quad\text{et}\quad\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$$

Les deux résultats : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})\oplus\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne sont que deux cas particuliers de $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.

Correction de l'exercice 4 :

1) **Montrons que** $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$ **:** On a $E_1\subset\mathbb{R}^3$ et $E_2\subset\mathbb{R}^3$ donc $E_1+E_2\subset\mathbb{R}^3$.
Raisonnons par analyse synthèse pour montrer l'inclusion réciproque.
Analyse : Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, supposons que $u=(a,a,a)+(x',y',z')$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ tels que $x'+y'+z'=0$.

Alors $\begin{cases} x &= a+x' \\ y &= a+y' \\ z &= a+z' \end{cases}$, donc $x+y+z = 3a + \underbrace{(x'+y'+z')}_{=0} = 3a$. On en déduit que $a = \frac{1}{3}(x+y+z)$, et on a alors $x' = x - \frac{1}{3}(x+y+z)$, $y' = y - \frac{1}{3}(x+y+z)$, et $z' = z - \frac{1}{3}(x+y+z)$.

Synthèse : Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Posons $a = \frac{1}{3}(x+y+z)$ et posons $x' = x-a$, $y' = y-a$ et $z' = z-a$.
Alors $x'+y'+z' = x+y+z-3a = x+y+z-(x+y+z) = 0$, donc $(x',y',z') \in E_2$.
De plus, $\underbrace{(a,a,a)}_{\in E_1} + \underbrace{(x',y',z')}_{\in E_2} = (a+x', a+y', a+z') = (x,y,z)$. Ainsi, $(x,y,z) \in E_1+E_2$, donc $\mathbb{R}^3 \subset E_1+E_2$ et donc finalement $\mathbb{R}^3 = E_1+E_2$

Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$: Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a,a,a)$. De plus, $a+a+a = 0$ donc $3a = 0$ et ainsi $a = 0$, on a donc $u = (0,0,0)$ et finalement $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$.

On en conclut que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, alors $(x,y,z) = \underbrace{(a,a,a)}_{\in E_1} + \underbrace{(x',y',z')}_{\in E_2}$ avec $a = \frac{1}{3}(x,y,z)$ et $x' = x-a$, $y' = y-a$ et $z' = z-a$ d'après la question précédente. On en déduit que

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (x',y',z') \\ &= \left(x - \frac{1}{3}(x+y+z)\ ,\ y - \frac{1}{3}(x+y+z)\ ,\ z - \frac{1}{3}(x+y+z)\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z\ ,\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\ ,\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de p dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) p est un projecteur donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(E_1) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E_2) = 3 - \dim(E_1) = 2$.
En prenant une base (e_1,e_2) de E_2 à laquelle on adjoint une base (e_3) de E_1, on obtient une base (e_1,e_2,e_3) de E dans laquelle la matrice représentative de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage P de la base canonique à la base (e_1,e_2,e_3) vérifie donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 :

1) A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $A^2 = A$.

Or $A^2 = \begin{pmatrix} a^2-a & -a^2+a \\ a-1 & -a+1 \end{pmatrix}$ donc A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $\begin{cases} a^2-a &= a \\ -a^2+a &= -a \\ a-1 &= 1 \\ -a+1 &= -1 \end{cases}$.

La seule solution de ce système est $a = 2$ donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} 2x-2y &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff x-y = 0 \iff x = y$ donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On en conclut que A est la projection sur $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3) Notons p le projecteur associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En posant $e_1 = (2,1)$ et $e_2 = (1,1)$, on a $e_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $e_2 \in \mathrm{Ker}(p)$, donc $p(e_1) = e_1$ et $p(e_2) = 0$, et (e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, la matrice de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1,e_2), on a donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à déterminer P^{-1} :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\forall (x',y')\in\mathbb{R}^2,\quad P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcl}2x+y&=&x'\\x+y&=&y'\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&x'-y'\\y&=&-x'+2y'\end{array}\right.$$

donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

On peut vérifier par le calcul qu'on a bien $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Suivant l'indication de l'énoncé, commençons par montrer que $(i)\Leftrightarrow(ii)$.
On a toujours $\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)\subset\mathrm{Im}(u)$. Ainsi dans les deux cas l'égalité des dimensions est une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité de ces sous-espaces vectoriels.
Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u))=\dim(\mathrm{Ker}(u^2))\iff\dim(E)-\mathrm{rg}(u)=\dim(E)-\mathrm{rg}(u^2)\iff\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(u^2)$.
Ainsi, on a donc bien $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u^2)\iff\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Im}(u^2)$.

Montrons que $(i)\implies(iii)$
Supposons que $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u^2)$, et soit $x\in\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Im}(u)$. Alors il existe un vecteur $y\in E$ tel que $x=u(y)$, et $u(x)=0$ donc $u(u(y))=0$. Ainsi $y\in\mathrm{Ker}(u^2)$ mais puisque $\mathrm{Ker}(u^2)=\mathrm{Ker}(u)$ on en déduit que $u(y)=0$ donc $x=0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Im}(u)=\{0\}$, ils sont donc en somme directe donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Im}(u))=\dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Im}(u))$. Or d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Im}(u))=\dim(E)$, donc finalement $\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Im}(u)=E$ et ainsi $\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)=E$.
On a donc montré que $(i)\implies(iii)$.

Montrons que $(iii)\implies(ii)$
Supposons que $E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$, et soit $x\in\mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=u(y)$. Comme $E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$ il existe un unique couple $(y_1,y_2)\in\mathrm{Ker}(u)\times\mathrm{Im}(u)$ tel que $y=y_1+y_2$.
Ainsi, $x=u(y_1+y_2)=u(y_2)$ car $y_1\in\mathrm{Ker}(u)$. Comme $y_2\in\mathrm{Im}(u)$, il existe un vecteur $y_3\in E$ tel que $y_2=u(y_3)$ ce qui entraîne $x=u(u(y_3))$ donc finalement $x\in\mathrm{Im}(u^2)$. On a montré que $\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Im}(u^2)$ et puisque l'inclusion $\mathrm{Im}(u^2)\subset\mathrm{Im}(u)$ est toujours vrai on en conclut finalement que $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Im}(u^2)$.
On a donc montré que $(iii)\implies(ii)$

Conclusion : puisque $(i)\iff(ii)$ et que $(i)\implies(iii)$ et $(iii)\implies(ii)$, on conclut à l'équivalence de ces trois propositions.

2) Les propositions précédentes sont évidemment vraies pour les projecteurs, mais elles sont aussi vrais pour tout isomorphismes puisqu'on a alors $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u^2)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Im}(u^2)=E$, ainsi que pour tout endomorphisme diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour tout $x\in E$ on a $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\in\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$. Or, $\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g))\leq\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(g))=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f+g)\leq\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.

2) Supposons que l'inégalité précédente soit une égalité. Alors par égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$. D'après la formule de Grassmann $\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g))=\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(g))-\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g))$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g))=0$ donc $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$.

Pour montrer que $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)=E$, on commence par montrer que $\mathrm{Ker}(f+g)=\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)$.
En effet, si $x\in\mathrm{Ker}(f+g)$, alors $f(x)=-g(x)=g(-x)$ Ainsi, $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux dans $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$ donc $f(x)=g(x)=0$, d'où $x\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f+g)\subset\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)$. L'inclusion réciproque est immédiate.

On a maintenant :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)) &= \dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g))-\dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g))\\ &= n-\mathrm{rg}(f)+n-\mathrm{rg}(g)-\dim(\mathrm{Ker}(f+g))\\ &= 2n-\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)-(n-\mathrm{rg}(f+g))\\ &= n \qquad \text{car } \mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \text{ par hypothèse}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)=E$ par inclusion et égalité des dimensions.

Correction de l'exercice 8 :

1) Soient $P,Q\in F$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Le polynôme nul appartient à F donc F est non vide.
$(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)=0$ car $P,Q\in F$ donc $\lambda P+\mu Q\in F$. Ainsi F est stable par combinaison linéaire.
Enfin, $F\neq E$ car $X\in E$ mais $X\notin F$.. En effet, si $P(X)=X$ alors $P(1)=1\neq 0$.
$\boxed{F \text{ est donc bien un sous-espace vectoriel strict de } E.}$
Soit P un polynôme de E quelconque. Posons $Q(X)=P(X)-P(1)$, Q est alors un polynôme de même degré que P qui appartient à F, et on a $P(X)=Q(X)+P(1)$.
Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ peut donc s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme constant. Soit donc $G=\mathrm{Vect}\,(1)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes constants. On vient de montrer que $F+G=E$. Pour montrer que $F\oplus G=E$ il suffit donc de montrer que $F\cap G=\{0\}$.
Soit $P\in F\cap G$. P est constant donc $P(X)=a$ avec $a\in\mathbb{R}$, et $P\in F$ donc $P(1)=0=a$. Ainsi P est le polynôme constant, donc $F\cap G=\{0\}$.
$\boxed{\text{Finalement } F\oplus\mathrm{Vect}\,(1)=E}$.

2) On vérifie de façon analogue à la question 1 que F est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ quelconque. Pour obtenir un polynôme qui s'annule en 1 et en 2, il suffit de lui soustraire un polynôme de degré 1 qui vaut $P(1)$ en 1 et $P(2)$ en 2.
Posons $R(X)=\dfrac{P(2)-P(1)}{2-1}(X-1)+P(1)=(P(2)-P(1))X+2P(1)-P(2))$, ce polynôme vérifie $R(1)=P(1)$ et $R(2)=P(2)$, ainsi en posant $Q(X)=P(X)-R(X)$, on a bien $\deg(Q)\leq\max(\deg(P),\deg(Q))\leq n$ car $n\geq 2$, et $Q\in F$.
Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ peut donc s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de degré 1. Posons $G=\mathrm{Vect}\,(1,X)=\mathbb{R}_1[X]$, on a montré que $F+G=E$ et il reste à montrer que $F\cap G=\{0\}$.
Soit $P\in F\cap G$. Il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $F(X)=aX+b$ et $F(1)=F(2)=0$ donne $\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0\\ 2a+b &=& 0\end{array}\right.$ d'où $a=b=0$.
$\boxed{\text{On a donc bien } F\cap G=\{0\} \text{ d'où l'on conclut que } F\oplus G=E.}$

3) On vérifie de façon analogue aux deux premières questions que F est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ que l'on cherche à écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un autre polynôme.
Il suffit de trouver un polynôme R tel que $R(x_1)=P(x_1)$, $R(x_2)=P(x_2)$,...,$R(x_k)=P(x_k)$. On peut penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange et poser

$$R(X)=\sum_{i=1}^{k}P(x_i)\frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{k}(X-x_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}$$

Ce polynôme est un polynôme de degré k qui vérifie la condition énoncé, donc en posant $Q(X)=P(X)-R(X)$ on a $Q\in F$ et P peut alors s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de degré $k-1$.
Posons $G=\mathrm{Vect}\left(1,X,X^2?\ldots,X^{k-1}\right)=\mathbb{R}_{k-1}[X]$. On a déjà montré que $F+G=E$.
Si $P\in F\cap G$, P est un polynôme de degré $k-1$ (car $P\in G$) qui s'annule k fois (car $P\in F$). Ainsi P est le polynôme nul, donc finalement $F\cap G=\{0\}$.
$\boxed{F\oplus G=E \text{ donc } G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } E.}$

Correction de l'exercice 9 : Sens direct : supposons que F est stable par q. Puisque q est un projecteur de E on a $E=\mathrm{Ker}(q)\oplus\mathrm{Im}(q)$. Tout vecteur x de F est dans E et peut donc s'écrire $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\mathrm{Ker}(q)$ et $x_2\in\mathrm{Im}(q)$. On a alors $q(x)=\underbrace{q(x_1)}_{=0}+\underbrace{q(x_2)}_{=x_2}=x_2$. Comme F est stable par q, $q(x)\in F$ donc $x_2\in F$. Il s'ensuit que $x_1=x-x_2\in F$ donc finalement $x_1\in F\cap\mathrm{Ker}(q)$ et $x_2\in F\cap\mathrm{Im}(q)$. On a montré que $F=(F\cap\mathrm{Ker}(q))+(F\cap\mathrm{Im}(q))$

De plus, $F \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $F \cap \mathrm{Im}(q)$ sont clairement en somme directe car $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ le sont.
Ainsi, on a bien $F = (F \cap \mathrm{Ker}(q)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(q))$.

Sens indirect : supposons que $F = (F \cap \mathrm{Ker}(q)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(q))$.
Soit $x \in F$, montrons que $q(x) \in F$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in F \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $x_2 \in F \cap \mathrm{Im}(q)$ tels que $x = x_1 + x_2$, donc $q(x) = x_2 \in F \cap \mathrm{Im}(q)$ donc $q(x) \in F$. Ainsi F est bien stable par q.

Correction de l'exercice 10 : Sens direct : supposons que p et u commutent.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(x) = 0$ donc $u(p(x)) = 0$ donc $p(u(x)) = 0$. Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. On a montré que $\mathrm{Ker}(p)$ est stable par u.
Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ donc $u(y) = u(p(x)) = p(u(x))$ par hypothèse, donc $u(y) \in \mathrm{Im}(p)$. On a montré que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u.

Sens indirect : supposons que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.
p est un projecteur donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ donc tout vecteur x de E peut s'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(p)$, donc $u(p(x)) = u(x_1)$ et $p(u(x)) = p(u(x_1)) + p(u(x_2))$. Or $u(x_1) \in \; im(p)$ et $u(x_2) \in \mathrm{Ker}(p)$ par stabilité donc $p(u(x)) = u(x_1)$. On a donc bien $u(p(x)) = p(u(x))$ pour tout vecteur x de E, donc p et u commutent.

Correction de l'exercice 11 :

1) Montrons d'abord que F et G sont en somme directe.
Soit $f \in F \cap G$, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1], f(x) = a$. Ainsi $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a$, mais puisque $f \in F$ on a $a = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$, ils sont donc en somme directe.

   Montrons maintenant que $F + G = E$. Soit $f \in E$. Posons $a = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - a$.
   Alors $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 a\,\mathrm{d}t = a - a = 0$. Ainsi $g \in G$ et $f = g + a$ donc $f \in F + G$. On a donc bien $E = \oplus F + G$.
2) Pour $f \in E$, on a vu dans la question précédente que $f = g + a$ avec $a = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque F et G sont en somme directe cette décomposition est unique.
   Ainsi, $\forall x \in [0,1],\ p(f)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction de l'exercice 12 :

1) Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors $(p+q)\circ(p+q) = p^2 + \underbrace{p \circ q}_{=0} + \underbrace{q \circ p}_{=0} + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$. Ainsi $(p+q)^2 = p + q$ donc $p + q$ est un projecteur.
   Supposons que $p + q$ soit un projecteur.
   On a donc $(p+q)^2 = p + q$ d'où $p \circ q + q \circ p = 0$
   Ainsi :
$$p \circ q = -q \circ p$$
   donc
$$p^2 \circ q = -p \circ q \circ p \qquad \text{en composant par } p$$
$$p \circ q = -(-q \circ p) \circ p$$
   donc
$$p \circ q = q \circ p^2$$
   donc
$$p \circ q = q \circ p$$
   Ainsi $p \circ q = -q \circ p$ et $p \circ q = q \circ p$ donc $p \circ q = -p \circ q$ d'où $2p \circ q = 0$ donc $p \circ q = 0$ et il s'ensuit que $q \circ p = 0$.

2) Supposons que $p+q$ est un projecteur.
L'inclusion $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$ est claire. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = p(x_1)+q(x_2)$ donc $(p+q)(y) = p^2(x_1) + p\circ q(x_2) + q \circ p(x_1) + q^2(x_2) = p(x_1)+q(x_2) = y$ car $p \circ q = q \circ p = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ donc finalement $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$.
Montrons que la somme est directe : si $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, alors $y = p(x_1) = q(x_2)$ pour un certain $(x_1, x_2) \in E^2$, donc $y = p(y) = p(q(x_2)) = 0$, donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$.
Finalement on a bien $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p+q)$ est claire.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. Alors $p(x) = -q(x)$ donc $p^2(x) = -p(q(x)) = 0$ donc $p(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p)$. De même en composant par q on obtient $0 = q(p(x)) = -q^2(x)$ donc $q(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$. Finalement $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ donc on a bien $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Correction de l'exercice 13 :

1) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $y \in F$ tel que $g(y) = x$, et $f(x) = 0 = f(g(y))$. En composant cette égalité par g, on obtient $g(f(g(y))) = 0$ mais puisque $g \circ f \circ g = g$ on a finalement $g(y) = 0$, d'où $x = 0$.
$\boxed{\text{Ainsi } \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}, \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(g) \text{ sont en somme directe.}}$

2) Soit $x \in E$. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons que l'on a $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe donc $z' \in F$ tel que $z = g(z')$.
En composant l'égalité $x = y + z$ par f on obtient $f(x) = f(z) = f(g(z'))$, puis en composant par g on obtient $g(f(x)) = g(f(g(z'))) = g(z') = z$.
Réciproquement, si l'on pose $z = g(f(x))$ et $y = x - z = x - g(f(x))$, on aura $x = y + z$ par définition de y et z, et il reste à vérifier que $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et que $z \in \mathrm{Im}(g)$. La relation $z \in \mathrm{Im}(g)$ est évidente car $z = g(f(x))$.
Enfin, $f(y) = f(x) - f(z) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$ puisqu'on a l'égalité $f \circ g \circ f = f$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
$\boxed{\text{Finalement on a bien } \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E}$

3) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}_n[x]$.
On a alors

$$\begin{aligned}
f(P)(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \\
g(f(P))(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \\
f(g(f(P)))(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k
\end{aligned}$$

donc on a bien $f \circ g \circ f = f$
De même,

$$g(P)(x) = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k t^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} t^{k}}{k} \\
f(g(P))(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} k t^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \\
&= P
\end{aligned}$$

$$g(f(g(P))) = g(P)$$

Correction de l'exercice 14 :

1) p est un projecteur donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Alors $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E et dans cette base la matrice de p est

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & 0 & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

le nombre de 1 dans cette matrice est égal à la dimension de $\mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(A) = p = \mathrm{rg}(p)$.
Ainsi, tout projecteur a son rang égal à sa trace.

2) Raisonnons par récurrence comme suggéré par l'énoncé. On note $\mathcal{P}(n)$: « Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ est une famille de sous espaces vectoriels de E on a $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$ avec égalité si et seulement si $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe. ».

— **Initialisation :** Pour $n = 2$, on a $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$ d'où $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$ avec égalité si et seulement si $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, si et seulement si F_1 et F_2 sont en somme directe. Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

— **Hérédité :** Soit $n \geq 2$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soit $F_1, F_2, \dots F_{n+1}$ une famille de sous espaces vectoriels de E.
Alors, $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1}) = \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \cap F_{n+1})$
Or, par hypothèse de récurrence, on a $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1}) &\leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n) + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \cap F_{n+1}) \\
&\leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_{n+1})
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités, c'est à dire si et seulement si $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + \cdots + F_n) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$ ET $\dim((F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \cap F_{n+1}) = 0$.
Par hypothèse de récurrence, il y a égalité si et seulement si $F_1, F_2, \dots F_n$ sont en somme directe ET $(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \cap F_{n+1} = \{0\}$, c'est à dire si et seulement si $F_1, F_2, \dots F_n$ sont en somme directe et F_{n+1} est en somme directe avec $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$. Cette condition est vérifiée si et seulement si $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ sont en somme directe, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

3) Le sens réciproque est le plus facile, supposons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2 =& p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 \\
&+ p_1 \circ p_2 + p_1 \circ p_3 + \cdots + p_1 \circ p_n \\
&+ p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_3 + \cdots + p_2 \circ p_n \\
&\qquad \vdots \\
&+ p_n \circ p_1 + p_n \circ p_2 + \cdots + p_n \circ p_{n-1} \\
=& p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 \\
=& p_1 + p_2 + \cdots + p_n && \text{car } p_1,\ p_2, \ldots, p_n \text{ sont des projecteurs}
\end{aligned}$$

ainsi, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ soit un projecteur.
Remarquons que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$ **(1)**. En effet, $\forall x \in E, p(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$.
On a $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(p_1) + \mathrm{tr}(p_2) + \cdots + \mathrm{tr}(p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_n)$ d'après la question 1 et par linéarité de la trace.
D'autre part, puisque p est un projecteur, on a aussi $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$. Finalement, $\dim(\mathrm{Im}(p)) = \sum_{i=1}^n \dim(\mathrm{Im}(p_1)) \geq \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n))$ donc on conclut grâce à l'inclusion **(1)** que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$.
De plus, d'après la question 2 puisqu'on est dans un cas d'égalité entre $\dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n))$ et $\dim(p_1) + \cdots + \dim(p_n)$, alors ces espaces vectoriels sont en somme directe.
Finalement, on a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.
Montrons maintenant que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et soit $x \in E$. Alors $p_j(x) \in \mathrm{Im}(p_j)$ donc $p_j(x) \in \mathrm{Im}(p)$. On a donc $p(p_j(x)) = p_j(x)$, c'est à dire $\sum_{i=1}^n p_i \circ p_j(x) = p_j(x)$. En retranchant $p_j(x)$ de chaque côté, on obtient $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n p_i \circ p_j(x) = 0$.
Or $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i \circ p_j(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$. Puisque les $\mathrm{Im}(p_i)$ sont en somme directe, on en déduit que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ on a $p_i \circ p_j(x) = 0$.

Correction de l'exercice 15 : Supposons $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$. Alors clairement $u^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = 2\dim(\mathrm{Ker} u) = \dim(E)$
Réciproquement, si $u^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et l'égalité des dimensions fournit l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
Supposons les deux premiers points vrais et montrons le troisième. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. L'application $u_{|H} : H \to \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme d'après la démo du théorème du rang. Soit $u_{|H}^{-1}$ l'isomorphisme réciproque. Soit v l'application définie sur $\mathrm{Im}(u) \oplus H$ par $v(x+y) = u_{|H}^{-1}(x) + f(y)$.
On a alors $u_{|H}^{-1}(x) \in H$ et $u_{|H}(y) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$, donc $u(v(x+y)) = u(u_{|H}^{-1}(x)) + 0 = x$.
d'autre part, $v(u(x+y)) = v(u(y)) = u_{|H}^{-1}(u(y)) = y$ car $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$.
Ainsi on a bien $u(v(x+y)) + v(u(x+y)) = x + y$ donc $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Réciproquement, supposons $u^2 = 0$ et il existe v tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $x = u(v(x)) + v(u(x)) = u(v(x))$ donc $x \in \mathrm{Im}(u)$. Réciproquement si $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a bien $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

Correction de l'exercice 16 :

1) En multipliant par A dans l'égalité (i) on obtient $A^2A' = AA'A = A$ d'après l'égalité (ii). Ainsi $\mathrm{rg}(A) \leq \min(\mathrm{rg}(A^2), \mathrm{rg}(A')) \leq$
Réciproquement, on a $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$ donc $\mathrm{rg}(A^2) \leq \mathrm{rg}(A)$.
On en conclut que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ donc $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.

2) a) Puisque $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$ et que $\mathrm{rg}(a^2) = \mathrm{rg}(a)$, on a égalité des dimensions donc $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$. En appliquant le théorème du rang on en déduit immédiatement que $\dim(\mathrm{Ker}(a^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(a))$ et comme $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a^2)$ on en déduit aussi que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(a^2)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Ker}(a)$. Alors il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(x')$. De plus $0 = a(x) = a^2(x')$ donc $x' \in \mathrm{Ker}(a^2)$. Puisque $\mathrm{Ker}(a^2) = \mathrm{Ker}(a)$ on a donc $x' \in \mathrm{Ker}(a)$ donc $x = a(x') = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ sont en somme directe, et puisque $\dim(\mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)) = \dim(\mathrm{Im}(a)) + \dim(\mathrm{Ker}(a)) = n$ d'après le théorème du rang, donc par égalité des dimensions on a finalement :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)}$$

b) Soit $(e_1, \ldots e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(a)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(a)$. D'après la question précédente, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est alors une base de $\mathbb{R}^n$ et dans cette base on a : $a(e_1), \ldots, a(e_r) \in \mathrm{Im}(a)$ et $a(e_{r+1}) = a(e_{r+2}) = \cdots = a(e_n) = 0$.

La matrice représentative de a dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où B est une matrice carrée de taille r. Cette matrice par bloc a le même rang que B car les autres lignes sont des 0, et comme le rang de cette matrice est $\text{rg}(a) = r$ on a finalement $\text{rg}(B) = r$, donc B est inversible.
Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$, alors on a d'après la formule de changement de base :

$$A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

c) Soit B' la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inverse de B. En posant $A' = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ on obtient en faisant le produit par blocs :

$$AA' = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et de même :

$$A'A = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B'B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $AA' = A'A$.
De même, on calcule :

$$AA'A = P \begin{pmatrix} BB'B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

et

$$A'AA' = P \begin{pmatrix} B'BB' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A'$$

$\boxed{\text{La matrice } A' \text{ est donc bien un pseudo-inverse de } A}$.

3) Soit $x \in \text{Ker}(a)$. On a $a(a'(x)) = a'(a(x)) = a'(0) = 0$ donc $a'(x) \in \text{Ker}(a)$. Ainsi $\text{Ker}(a)$ est stable par a'
4) Soit $y \in \text{Im}(a)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = a(x)$, donc $a'(y) = a'(a(x)) = a(a'(x)) \in \text{Im}(a)$ donc $\text{Im}(a)$ est stable par a'.
En reprenant la base $\mathcal{B}$ de la question 2)b) la matrice représentative de a' dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec D une matrice carré de taille r. La formule de changement de base donne donc bien $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
5) Comme a' est un pseudo inverse de a on a $aa' = aa'aa' = (aa')^2$ donc aa' est un projecteur.
Soit x un vecteur de $\text{Ker}(aa')$. Puisque $aa' = a'a$ on a $x \in \text{Ker}(a'a)$ donc $a(x) = a(a'(a(x))) = a(0) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker}(a)$. Réciproquement si $x \in \text{Ker}(a)$ on a $0 = a'(a(x)) = a(a'(x))$ donc $x \in \text{Ker}(aa')$. On en conclut que $\boxed{\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)}$.
De même, si $y \in \text{Im}(aa')$ alors $y \in \text{Im}(a)$, et si $y \in \text{Im}(a)$ alors $y \in \text{Im}(aa'a)$ donc $y \in \text{Im}(aa')$. Ainsi, $\boxed{\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)}$.
Enfin la matrice $P^{-1}(AA')P$ représente le projecteur aa' dans la base $\mathcal{B}$. Or comme $\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)$ et que $\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)$ on a $\mathbb{R}^n = \text{Im}(aa') \oplus \text{Ker}(aa')$. Dans cette base, la matrice représentative de aa' est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc :

$$P^{-1}(AA')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Puisque on a $P^{-1}(AA')P = \begin{pmatrix} BD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ selon les questions précédentes, alors $BD = I_r$ donc D est nécessairement l'inverse de B. L'inverse d'une matrice étant unique, cela suffit à prouver l'unicité du pseudo-inverse si il existe.

Correction de l'exercice 17 :

1) On a $\text{Im}(u) = F + G$ puisque par définition $F + G = \{x + y, (x, y) \in F \times G\}$. De plus, $\text{Ker}(u) = \{(x, y) \in F \times G; x + y = 0\} = \{(x, y) \in F \times G; y = -x\}$. Or si $(x, y) \in F \times G$ et que $y = -x$, alors $y \in F$ donc x et y sont dans $F \cap G$. Réciproquement, si x et y sont dans $F \times G$, il suffit d'avoir $y = -x$ pour que (x, y) soit dans $\text{Ker}(u)$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{(x,y) \in (F \cap G)^2 \ ; y = -x\} = \{(x,-x) \ ; \ x \in F \cap G\}$$

donc $\mathrm{Ker}(u)$ est isomorphe à $F \cap G$ via l'application $F \cap G \to F \times G, x \mapsto (x,-x)$. D'après le théorème du rang on a donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(F \times G)$$

donc

$$\dim(F \cap G) + \dim(F+G) = \dim(F \times G)$$

c'est à dire avec le résultat admis :

$$d_{F\cap G} + d_{F+G} = d_F + d_G$$

2) En élevant l'égalité précédente au carré on obtient :

$$d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 + 2d_{F+G}d_{F\cap G} = d_F^2 + d_G^2 + 2d_F d_G$$

d'où

$$\begin{aligned} d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 - d_F^2 - d_G^2 &= 2(d_F d_G - d_{F+G}d_{F\cap G}) \\ &= 2(d_F d_G - (d_F + d_G - d_{F\cap G})d_{F\cap G}) \\ &= 2(d_F d_G - d_F d_{F\cap G} - d_G d_{F\cap G} + d_{F\cap G}^2) \\ &= 2(d_F - d_{F\cap G})(d_G - d_{F\cap G}) \end{aligned}$$

3) Comme $F\cap G$ est un sous espace vectoriel de F (et de G) on a $d_{F\cap G} \leq d_F$ et $d_{F\cap G} \leq d_G$, donc $2(d_G - d_{F\Cap G})(d_F - d_{F\cap G} \geq 0$ d'où l'inégalité :

$$d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 \geqslant d_F^2 + d_G^2$$

Cas d'égalité :

$$\begin{aligned} d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 = d_F^2 + d_G^2 & \text{si et seulement si } (d_F - d_{F\cap G})(d_G - d_{F\cap G}) = 0 \\ & \text{si et seulement si } d_F = d_{F\cap G} \text{ ou } d_G = d_{F\cap G} \\ & \text{si et seulement si } F = F\cap G \text{ ou } G = F \cap G \text{ (inclusions et égalité des dimensions)} \\ & \text{si et seulement si } F \subset G \text{ ou } G \subset F \end{aligned}$$

4) Suivant l'indication on pose $f(x) = (x + d_G - d_{F\cap G})^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - x^\alpha - d_G^\alpha$. f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables (car $\forall x \in [0,+\infty[$ on a bien $x \geq 0$ et $x + d_G - d_{F\cap G} \geq 0$) et :

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = \alpha(x + d_G - d_{F\cap G})^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}$$

Pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff (x + d_G - d_{F\cap G})^{\alpha-1} \geq x^{\alpha-1} \\ &\iff x + d_G - d_{F\cap G} \geq x \\ &\iff d_G - d_{F\cap G} \geq 0 \end{aligned}$$

donc $f' \geq 0$ et f est croissante sur $[0,+\infty[$. En particulier on a $f(d_F) \geq f(d_{F\cap G})$ ce qui donne :

$$(d_F + d_G - d_{F\cap G})^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - d_F^\alpha - d_G^\alpha \geq 0$$

c'est à dire :

$$d_{F+G}^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - d_F^\alpha - d_G^\alpha \geq 0$$

d'où le résultat voulu.
Cas d'égalité :

$d_{F+G}^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - d_F^\alpha - d_G^\alpha = 0$ si et seulement si f est constante sur $[d_{F\cap G}, d_F]$

si et seulement si f' s'annule sur $[d_{F\cap G}, d_F]$

si et seulement si $d_G = d_{F\cap G}$ (la dérivée s'annule) ou $d_F = d_{F\cap G}$(l'intervalle est réduit à un po

si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.